Vjerovatnoća i statistika

Slučajne veličine (promjenljive) diskretnog tipa

1. Slučajna veličina X ima raspodjelu

$$X: \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.4 \end{array}$$

Izračunati $\mathsf{P}\{X < 2\}$, a zatim naći raspodjelu slučajne promjenljive:

(a) $Y = 4X$;

(b) $Y = X^2$;

(c) $Y = 2X^3 - 2X + 1$.

◀
$\mathsf{P}\{X < 2\} = \mathsf{P}\{X = -1\} + \mathsf{P}\{X = 0\} + \mathsf{P}\{X = 1\} = 0.6$.
Za preostali dio zadatka koristimo

$$\mathsf{P}\{f(X) = y_j\} = \sum_{x_i : f(x_i) = y_j} \mathsf{P}\{X = x_i\}.$$

(a) $\mathcal{R}_Y = \{-4, 0, 4, 12\}$;
$\mathsf{P}\{Y = -4\} = \mathsf{P}\{X = -1\} = 0.2$;
$\mathsf{P}\{Y = 0\} = \mathsf{P}\{X = 0\} = 0.1$;
$\mathsf{P}\{Y = 4\} = \mathsf{P}\{X = 1\} = 0.3$;
$\mathsf{P}\{Y = 12\} = \mathsf{P}\{X = 3\} = 0.4$

$$Y: \begin{array}{cccc} -4 & 0 & 4 & 12 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.4 \end{array}$$

(b) $\mathcal{R}_Y = \{0, 1, 9\}$;
$\mathsf{P}\{Y = 0\} = \mathsf{P}\{X = 0\} = 0.1$;
$\mathsf{P}\{Y = 1\} = \mathsf{P}\{X = -1\} + \mathsf{P}\{X = 1\} = 0.5$;
$\mathsf{P}\{Y = 9\} = \mathsf{P}\{X = 3\} = 0.4$;

$$Y: \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 9 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{array}$$

(c) $X = -1 \Longrightarrow Y = 1$;
$X = 0 \Longrightarrow Y = 1$;
$X = 1 \Longrightarrow Y = 1$;
$X = 3 \Longrightarrow Y = 49$;
$\mathsf{P}\{Y = 1\} = \mathsf{P}\{X = -1\} + \mathsf{P}\{X = 0\} + \mathsf{P}\{X = 1\} = 0.6$;
$\mathsf{P}\{Y = 49\} = \mathsf{P}\{X = 3\} = 0.4$;

$$Y: \begin{array}{cc} 1 & 49 \\ 0.6 & 0.4 \end{array}$$

▶

2. Neka je

$$X: \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \end{array}$$

Naći raspodjelu za

(a) $Z = \min\{X, 2\}$;

(b) $Z = \max\{X, 2\}$.

3. Slučajna veličina X ima raspodjelu

$$X: \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{c}{9} & \frac{c^2}{9^2} & \frac{c^3}{9^3} & \dots & \frac{c^n}{9^n} & \dots \end{array}.$$

(a) Odrediti vrijednost konstante c;

(b) Naći $\mathsf{P}\big\{8 \leqslant X < 29\big\}$;

(c) Odrediti raspodjelu slučajne veličine

$$Y = \ln\left(2 + \sin\frac{(2X-1)\pi}{2}\right).$$

◀

(a) Kako je X slučajna veličina, to važi $c > 0$, $c/9 < 1$ i

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{c}{9} + \frac{c^2}{9^2} + \frac{c^3}{9^3} + \cdots + \frac{c^n}{9^n} + \cdots.$$

Dobijamo:

$$\frac{2}{3} = \frac{c}{9} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{9^n} = \frac{c}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{c}{9}}$$

odnosno

$$18 = 5c$$

tj.

$$\frac{c}{9} = \frac{2}{5}.$$

Dakle,

$$X: \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{4}{25} & \frac{8}{125} & \dots & \frac{2^n}{5^n} & \dots \end{array}.$$

(b)

$$\mathsf{P}\big\{8 \leqslant X < 29\big\} = \sum_{k=8}^{28} \frac{2^k}{5^k} = \frac{2^8}{5^8} \cdot \frac{1 - \frac{2^{21}}{5^{21}}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{3}\left(\frac{2^8}{5^8} - \frac{2^{29}}{5^{29}}\right).$$

(c)

$Y(0) = \ln\big(2 + \sin\frac{-\pi}{2}\big) = 0$,

$Y(1) = \ln\big(2 + \sin\frac{\pi}{2}\big) = \ln 3$,

$Y(2) = \ln\left(2 + \sin\frac{3\pi}{2}\right) = 0,$

$Y(3) = \ln\left(2 + \sin\frac{5\pi}{2}\right) = \ln 3,$

$\dots\dots\dots\dots$

Dakle, $\mathcal{R}_Y = \{0, \ln 3\}$;

$$\mathsf{P}\{Y = \ln 3\} = \frac{2}{5} + \frac{2^3}{5^3} + \frac{2^5}{5^5} + \cdots = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2^2}{5^2}} = \frac{10}{21},$$

i

$$\mathsf{P}\{Y = 0\} = 1 - \mathsf{P}\{Y = \ln 3\} = \frac{11}{21}.$$

Slijedi,

Dakle,

$$Y : \begin{matrix} 0 & \ln 3 \\ \frac{11}{21} & \frac{10}{21}. \end{matrix}$$

►

4. Kocka za igru se baca 2 puta. Neka je X zbir palih brojeva. Naći raspodjelu slučajne veličine X.

◄

$$\Omega = \{(i, j) \,:\, i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} \Longrightarrow |\Omega| = 36.$$

$\mathcal{R}_X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$

$\mathsf{P}\{X = 2\} = \mathsf{P}\{(1, 1)\} = \dfrac{1}{36};$

$\mathsf{P}\{X = 3\} = \mathsf{P}\{(1, 2), (2, 1)\} = \dfrac{2}{36};$

$\mathsf{P}\{X = 4\} = \mathsf{P}\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\} = \dfrac{3}{36};$

$\mathsf{P}\{X = 5\} = \mathsf{P}\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\} = \dfrac{4}{36};$

$\mathsf{P}\{X = 6\} = \mathsf{P}\{(1, 5), (2, 4), (3, 2), (4, 2), (5, 1)\} = \dfrac{5}{36};$

$\mathsf{P}\{X = 7\} = \mathsf{P}\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\} = \dfrac{6}{36};$

$\mathsf{P}\{X = 8\} = \mathsf{P}\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\} = \dfrac{5}{36};$

$\mathsf{P}\{X = 9\} = \mathsf{P}\{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\} = \dfrac{4}{36};$

$\mathsf{P}\{X = 10\} = \mathsf{P}\{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\} = \dfrac{3}{36};$

$\mathsf{P}\{X = 11\} = \mathsf{P}\{(5, 6), (6, 5)\} = \dfrac{2}{36};$

$\mathsf{P}\{X = 12\} = \mathsf{P}\{(6, 6)\} = \dfrac{1}{36}.$

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

►

5. Kocka za igru se baca četiri puta. Neka je α zbir brojeva dobijenih u prva dva, a β zbir brojeva dobijenih pri trećem i četvrtom bacanju. Naći vjerovatnoću da jednačina $x^2 - \alpha x + \beta = 0$, ima

(a) konjugovano–kompleksna rješenja;

(b) jednaka rješenja.

(c) realna i različita rješenja;

◄

$D = \alpha^2 - 4\beta$.

$$\alpha, \beta : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

$$\alpha^2 : \begin{pmatrix} 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & 100 & 121 & 144 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

$$4\beta : \begin{pmatrix} 8 & 9 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & 40 & 44 & 48 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

(a)

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\{D < 0\} &= \mathsf{P}\left\{\alpha^2 - 4\beta < 0\right\} \\ &= \mathsf{P}\{\alpha = 2, \beta \geqslant 2\} + \mathsf{P}\{\alpha = 3, \beta \geqslant 3\} + \mathsf{P}\{\alpha = 4, \beta \geqslant 5\} + \\ &\quad + \mathsf{P}\{\alpha = 5, \beta \geqslant 7\} + \mathsf{P}\{\alpha = 6, \beta \geqslant 10\} \\ &= \frac{1}{36} \cdot 1 + \frac{2}{36} \cdot \frac{35}{36} + \frac{3}{36} \cdot \frac{30}{36} + \frac{4}{36} \cdot \frac{21}{36} + \frac{5}{36} \cdot \frac{6}{36} \\ &= \frac{310}{36^2}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\{D = 0\} &= \mathsf{P}\left\{\alpha^2 - 4\beta = 0\right\} \\ &= \mathsf{P}\{\alpha = 4, \beta = 4\} + \mathsf{P}\{\alpha = 6, \beta = 9\} \\ &= \frac{3}{36} \cdot \frac{3}{36} + \frac{5}{36} \cdot \frac{4}{36} = \frac{29}{36^2}. \end{aligned}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}\{D > 0\} &= 1 - \mathsf{P}\{D \leqslant 0\} \\
&= 1 - \mathsf{P}\{D < 0\} - \mathsf{P}\{D = 0\} \\
&= 1 - \frac{310}{36^2} - \frac{29}{36^2} = \frac{957}{36^2}.
\end{aligned}
$$

▶

6. U kutiji se nalazi m bijelih i n crnih kuglica. Iz kutije se (a) sa vraćanjem (b) bez vraćanja izvlači k kuglica. Odrediti raspodjelu slučajne veličine X koja predstavlja broj bijelih kuglica među izvučenima.

◀

(a)

Kako je sastav kutije prije svakog izvlačenja isti, to možemo smatrati da izvodimo k nezavisnih eksperimenata izvlačenja kuglice iz kutije. Neka je A događaj da je izvučena bijela kuglica u pojedinom izvlačenju; $\mathsf{P}(A) = \dfrac{m}{m+n}$.

Slučajna veličina X jednaka je broju pojavljivanja događaja A u nizu od k nezavisnih eksperimenata, (tj. predstavlja broj "uspjeha" u nizu od k nezavisnih eksperimenata), pa je $X : \mathcal{B}\left(k, \dfrac{m}{m+n}\right)$, odnosno

$$
\mathsf{P}\{X = \ell\} = \binom{k}{\ell} \left(\frac{m}{m+n}\right)^{\ell} \left(\frac{n}{m+n}\right)^{k-\ell}, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots, k.
$$

(b)

$$
\Omega = \{\text{"Svi } k\text{-podskupovi skupa od } m+n \text{ elementa"}\} \Longrightarrow |\Omega| = \binom{m+n}{k}.
$$

Događaju $\{X = \ell\}$ odgovaraju $k-$podskupovi od ℓ bijelih i $k - \ell$ crnih kuglica, pa je

$$
\mathsf{P}\{X = \ell\} = \frac{\binom{m}{\ell}\binom{n}{k-\ell}}{\binom{m+n}{k}}, \quad \max\{0, k-n\} \leq \ell \leq \min\{m, k\},
$$

odnosno $X : \mathcal{H}(m, n, k)$.

▶

7. U kutiji se nalazi m bijelih i n crnih kuglica. Iz kutije se po modelu sa vraćanjem izvlači jedna po jedna kuglica do izvlačenja (a) prve bijele kuglice, (b) ℓ-te bijele kuglice. Odrediti raspodjelu slučajne veličine X koja predstavlja broj izvlačenja.

◀

(a) $X : \mathcal{G}\left(\frac{m}{m+n}\right)$,

$$
\mathsf{P}\{X = k\} = \left(\frac{n}{m+n}\right)^{k-1} \frac{m}{m+n}, \; k = 1, 2, \ldots.
$$

(b)

$$
\mathsf{P}\{X = k\} = \binom{k-1}{\ell-1} \left(\frac{n}{m+n}\right)^{k-\ell} \left(\frac{m}{m+n}\right)^{\ell}, \; k = \ell, \ell+1, \ldots.
$$

▶

8. Čovjek u mraku pokušava da otvori vrata. U džepu ima n ključeva, od kojih samo jedan otključava vrata. Neka je X broj pokušaja do otključavanja. Naći raspodjelu slučajne veličine X.

◀

Neka su ključevi numerisani brojevima $1, 2, \ldots, n$ i neka pravom ključu odgovara broj 1.

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) : \, x_i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \; x_i \neq x_j, i \neq j\} \Longrightarrow |\Omega| = n!.$$

Događaj da je pravi ključ izvučen u $k-$tom pokušaju:

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega : x_k = 1\} \Longrightarrow |A| = (n-1)!.$$

$$\mathsf{P}\{X = k\} = \frac{1}{n}, \; k = \overline{1, n}.$$

▶

9. Od 5 mjesta u nizu, 3 osobe biraju gdje će sjesti. Seriju čini niz praznih ili zauzetih mjesta. Neka je X slučajna veličina koja je jednaka broju serija. Naći raspodjelu slučajne veličine X.

◀

Označimo sa z zauzeto, a sa p prazno mjesto. Tri mjesta će biti zauzeta, a dva prazna, što znači da kao rezultate eksperimenta dobijamo permutacije multiskupa $\mathcal{M} = \{\mathsf{z}^3, \mathsf{p}^2\}$. Dakle, imamo $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ različitih rasporeda koji su jednako-vjerovatni:

zzzpp

zzpzp, zzppz, zppzz

zpzzp, zpzpz

pzzzp

pzzpz

pzpzz

ppzzz

Dobijamo

$$X : \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} & \frac{1}{10} \end{array}.$$

10. Strijelac gađa u metu 2 puta, a onda još onoliko puta koliko je pogodaka postigao u prvoj seriji. Ako su gađanja nezavisna i ako je vjerovatnoća pogotka u svakom pokušaju p, naći raspodjelu slučajne veličine X koja predstavlja broj pogodaka. Kolika je vjerovatnoća događaja da je meta pogođena bar jednom?

◀

Označimo sa 0 promašaj, a sa 1 pogodak.

$$\Omega = \{00, 100, 101, 010, 011, 1100, 1101, 1110, 1111\};$$

Neka je $q = 1 - p$.

$\mathsf{P}\{X = 0\} = q \cdot q = q^2;$

$\mathsf{P}\{X = 1\} = p \cdot q \cdot q + q \cdot p \cdot q = 2pq^2;$

$\mathsf{P}\{X=2\} = p\cdot q\cdot p + q\cdot p\cdot p + p\cdot p\cdot q\cdot q = 2p^2q + p^2q^2,$

$\mathsf{P}\{X=3\} = p\cdot p\cdot q\cdot p + p\cdot p\cdot p\cdot q = 2p^3q;$

$\mathsf{P}\{X=4\} = p\cdot p\cdot p\cdot p = p^4.$

$$X : \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ q^2 & 2pq^2 & 2p^2q+p^2q^2 & 2p^3q & p^4 \end{array}.$$

Važi

$$q^2 + 2pq^2 + 2p^2q + p^2q^2 + 2p^3q + p^4 = (p^2+pq+q)^2 = (p(p+q)+q)^2 = (p+q)^2 = 1.$$

$$\mathsf{P}\{X \geqslant 1\} = 1 - \mathsf{P}\{X=0\} = 1 - q^2.$$

▶

11. n osoba, među kojima su osobe A i B, su na slučajan način raspoređene na n stolica u nizu. Odrediti raspodjelu slučajne veličine X koja predstavlja broj osoba koje sjede između osoba A i B.

◀

$$\Omega = \{\text{"Sve permutacije skupa od } n \text{ elemenata"}\} \Longrightarrow |\Omega| = n!.$$

$$\mathcal{R}_X = \{0,1,2,\ldots,n-2\}.$$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{X=k\} &= \frac{2\cdot\binom{n-2}{k}\cdot k!\cdot(n-(k+2)+1)!}{n!}\\ &= \frac{2\cdot(n-k-1)\cdot(n-2)!}{n!}\\ &= \frac{2(n-k-1)}{n(n-1)}, \quad k\in\mathcal{R}_X.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-2}\mathsf{P}\{X=k\} &= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1)\\ &= \frac{2}{n(n-1)}\left((n-1)^2 - \frac{(n-2)(n-1)}{2}\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

▶

12. Iz grupe od $2n$ bračnih parova, na slučajan način se bira grupa od $2n$ osoba. Naći raspodjelu slučajne veličine X, koja predstavlja broj bračnih parova u odabranoj grupi.

◀

$$\Omega = \{\text{"Svi } 2n\text{–podskupovi skupa od } 4n \text{ elemenata"}\} \Longrightarrow |\Omega| = \binom{4n}{2n}.$$

$$\mathcal{R}_X = \{0,1,2,\ldots,n\}.$$

$$\mathsf{P}\{X=k\} = \frac{\binom{2n}{k}\cdot\binom{2n-k}{2n-2k}\cdot 2^{2n-2k}}{\binom{4n}{2n}}, \quad k\in\mathcal{R}_X.$$

Dokazati da važi:

$$\sum_{k=0}^{n}\mathsf{P}\{X=k\} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{2n}{k}\cdot\binom{2n-k}{2n-2k}\cdot 2^{2n-2k}}{\binom{4n}{2n}} = 1.$$

▶

13. Igrači A i B igraju niz partija u igri u kojoj se pobjedniku partije dodjeljuje jedan poen. Vjerovatnoća pobjede u pojedinoj partiji je ista za oba igrača. Pobjednik igre je igrač koji prvi ostvari šest poena, s tim što se, ukoliko je rezultat 6 : 5, igra nastavlja dok jedan od igrača ne ostvari dva poena razlike. Naći raspodjelu slučajne veličine X koja predstavlja ukupan broj poena u igri.

◀

Rezultat 6 : 0 za jednog od igrača:

$$\mathsf{P}\{X=6\} = 2\cdot\frac{1}{2^6}.$$

Rezultat 6 : 1 za jednog od igrača:

$$\mathsf{P}\{X=7\} = 2\cdot\binom{6}{1}\cdot\frac{1}{2^7}.$$

Rezultat 6 : 2 za jednog od igrača:

$$\mathsf{P}\{X=8\} = 2\cdot\binom{7}{2}\cdot\frac{1}{2^8}.$$

Rezultat 6 : 3 za jednog od igrača:

$$\mathsf{P}\{X=9\} = 2\cdot\binom{8}{3}\cdot\frac{1}{2^9}.$$

Rezultat 6 : 4 za jednog od igrača:

$$\mathsf{P}\{X=10\} = 2\cdot\binom{9}{4}\cdot\frac{1}{2^{10}}.$$

Rezultat 7 : 5 za jednog od igrača:

$$\mathsf{P}\{X=12\} = \underbrace{\binom{10}{5}\cdot\frac{1}{2^{10}}}_{5:5}\cdot\underbrace{2\cdot\frac{1}{2^2}}_{\text{2 poena za pobjednika}}.$$

Rezultat $k+1:k-1$ za jednog od igrača:

$$\mathsf{P}\{X=2k\} = \underbrace{\binom{10}{5}\cdot\frac{1}{2^{10}}}_{5:5}\cdot\underbrace{\left(2\cdot\frac{1}{2^2}\right)^{k-6}}_{\text{igra se nastavlja: svake naredne dvije partije "AB" ili "BA"}}\cdot\underbrace{2\cdot\frac{1}{2^2}}_{\text{2 poena za pobjednika}}, \quad k=6,7,8,\ldots$$

▶

14. Simetričan novčić se baca 6 puta. Naći raspodjelu slučajne veličine X koja predstavlja najveći broj uzastopnih pojavljivanja iste strane.

◀

Strane se pojavljuju naizmjenično: (G, P, G, P, G, P), (P, G, P, G, P, G),

$$\mathsf{P}\{X = 1\} = \frac{2}{2^6} = \frac{1}{2^5}.$$

Jedna strana se pojavljuje 6 puta uzastopno: (G, G, G, G, G, G), (P, P, P, P, P, P),

$$\mathsf{P}\{X = 6\} = \frac{2}{2^6} = \frac{1}{2^5}.$$

Pet puta uzastopno se pojavljuje jedna strana: (P, P, P, P, P, G), (G, P, P, P, P, P), (G, G, G, G, G, P), (P, G, G, G, G, G),

$$\mathsf{P}\{X = 5\} = \frac{4}{2^6} = \frac{2}{2^5}.$$

Četiri puta uzastopno se pojavljuje jedna strana. Uočimo da nam kompozicije broja 6 sa najvećim sabirkom jednakim 4 (u ovom slučaju imamo dva multiskupa $\{4^1, 1^2\}$ i $\{4^1, 2^1\}$ - kompozicije broja 6 na sabirke od kojih je najveći jednak 4 su permutacije ovih multiskupova) pomažu da lakše nađemo broj povoljnih uređenih šestorki.

Svakoj kompoziciji odgovaraju po tačno dvije uređene šestorke:

kompoziciji $4 + 1 + 1$ odgovaraju uređene šestorke (P, P, P, P, G, P) i (G, G, G, G, P, G);

kompoziciji $1 + 4 + 1$ odgovaraju uređene šestorke (G, P, P, P, P, G) i (P, G, G, G, G, P);

kompoziciji $1 + 1 + 4$ odgovaraju uređene šestorke (P, G, P, P, P, P) i (G, P, G, G, G, G);

kompoziciji $4 + 2$ odgovaraju uređene šestorke (P, P, P, P, G, G) i (G, G, G, G, P, P);

kompoziciji $2 + 4$ odgovaraju uređene šestorke (G, G, P, P, P, P) i (P, P, G, G, G, G).

Dakle,

$$\mathsf{P}\{X = 4\} = \frac{10}{2^6} = \frac{5}{2^5}.$$

Tri puta uzastopno se pojavljuje jedna strana: $(\{3^1, 1^3\}, \{1^1, 2^1, 3^1\}, \{3^2\})$

$$\mathsf{P}\{X = 3\} = \frac{22}{2^6} = \frac{11}{2^5}.$$

Dva puta uzastopno se pojavljuje jedna strana: $(\{2^1, 1^4\}, \{2^2, 1^2\}, \{2^3\})$

$$\mathsf{P}\{X = 2\} = \frac{24}{2^6} = \frac{12}{2^5}.$$

▶